Polinômios Centrais para Álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas

Leomaques Francisco Silva Bernardo [1]

sob orientação do

Prof. Plamen Koshlukov

Dezembro - 2015

[1] Bolsista Capes.

Sumário

Introdução

- A PI-teoria, teoria das álgebras que satisfazem identidades polinomiais, é uma parte importante da teoria de anéis.
- Questão central: Descrição das identidades e polinômios centrais de uma álgebra.
- O nosso trabalho se destina a apresentar descrições dos polinômios centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para a álgebra das matrizes $M_2(K)$ e para as álgebras $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$.

Introdução

- A PI-teoria, teoria das álgebras que satisfazem identidades polinomiais, é uma parte importante da teoria de anéis.
- Questão central: Descrição das identidades e polinômios centrais de uma álgebra.
- O nosso trabalho se destina a apresentar descrições dos polinômios centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para a álgebra das matrizes $M_2(K)$ e para as álgebras $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$.

Introdução

- A PI-teoria, teoria das álgebras que satisfazem identidades polinomiais, é uma parte importante da teoria de anéis.
- Questão central: Descrição das identidades e polinômios centrais de uma álgebra.
- O nosso trabalho se destina a apresentar descrições dos polinômios centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para a álgebra das matrizes $M_2(K)$ e para as álgebras $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$.

Álgebras

No que segue K denotará um corpo.

Álgebra

Uma K-**álgebra** (álgebra sobre K ou simplesmente álgebra) é um par $(A, *)$, onde A é um espaço vetorial e $*$ é uma operação em A que é uma aplicação bilinear, ou seja, $* : A \times A \longrightarrow A$ satisfaz

(i) $(a + b) * c = a * c + b * c$;

(ii) $a * (b + c) = a * b + a * c$;

(iii) $(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda(a * b)$.

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in K$.

Por simplicidade, escreveremos ab ao invés de $a * b$.

Álgebras

No que segue K denotará um corpo.

Álgebra

Uma K-**álgebra** (álgebra sobre K ou simplesmente álgebra) é um par $(A, *)$, onde A é um espaço vetorial e $*$ é uma operação em A que é uma aplicação bilinear, ou seja, $* : A \times A \longrightarrow A$ satisfaz

(i) $(a+b)*c = a*c+b*c$;

(ii) $a*(b+c) = a*b+a*c$;

(iii) $(\lambda a)*b = a*(\lambda b) = \lambda(a*b)$.

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in K$.

Por simplicidade, escreveremos ab ao invés de $a*b$.

Álgebras

No que segue K denotará um corpo.

Álgebra

Uma K-**álgebra** (álgebra sobre K ou simplesmente álgebra) é um par $(A, *)$, onde A é um espaço vetorial e $*$ é uma operação em A que é uma aplicação bilinear, ou seja, $* : A \times A \longrightarrow A$ satisfaz

(i) $(a+b)*c = a*c+b*c$;

(ii) $a*(b+c) = a*b+a*c$;

(iii) $(\lambda a)*b = a*(\lambda b) = \lambda(a*b)$.

para quaisquer $a, b, c \in A$ e $\lambda \in K$.

Por simplicidade, escreveremos ab ao invés de $a*b$.

Álgebras

Uma álgebra A é dita ser:

Associativa

Se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in A$.

Comutativa

Se $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$.

Unitária

Se existe um elemento $1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$ para todo $a \in A$

De agora em diante, a menos que mencionarmos o contrário, todas as álgebras serão associativas e com unidade.

Álgebras

Uma álgebra A é dita ser:

Associativa

Se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in A$.

Comutativa

Se $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$.

Unitária

Se existe um elemento $1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$ para todo $a \in A$

De agora em diante, a menos que mencionarmos o contrário, todas as álgebras serão associativas e com unidade.

Álgebras

Uma álgebra A é dita ser:

Associativa

Se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in A$.

Comutativa

Se $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$.

Unitária

Se existe um elemento $1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$ para todo $a \in A$

De agora em diante, a menos que mencionarmos o contrário, todas as álgebras serão associativas e com unidade.

Álgebras

Uma álgebra A é dita ser:

Associativa

Se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in A$.

Comutativa

Se $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$.

Unitária

Se existe um elemento $1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$ para todo $a \in A$

De agora em diante, a menos que mencionarmos o contrário, todas as álgebras serão associativas e com unidade.

Álgebras

Uma álgebra A é dita ser:

Associativa

Se $(ab)c = a(bc)$, para quaisquer $a, b, c \in A$.

Comutativa

Se $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$.

Unitária

Se existe um elemento $1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$ para todo $a \in A$

De agora em diante, a menos que mencionarmos o contrário, todas as álgebras serão associativas e com unidade.

Álgebras

Apresentaremos a seguir alguns exemplos importantes de álgebras.

- **Álgebra de Matrizes** $M_n(K)$: O espaço vetorial $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em K é uma álgebra associativa com unidade.

Álgebras

Apresentaremos a seguir alguns exemplos importantes de álgebras.

- **Álgebra de Matrizes** $M_n(K)$: O espaço vetorial $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em K é uma álgebra associativa com unidade.

Álgebras

- **Álgebra de Grassmann**: Seja V um espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$. Definimos a **álgebra de Grassmann (ou álgebra exterior)** de V, denotada por E como sendo a álgebra com base

$$\{1, e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \ldots < i_k, k \geq 1\}$$

e cujo produto é definido pelas relações

$$e_i^2 = 0 \text{ e } e_i e_j = -e_j e_i \text{ para quaisquer } i, j \in \mathbb{N}.$$

Álgebras

- **Álgebra de Grassmann**: Seja V um espaço vetorial com base $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$. Definimos a **álgebra de Grassmann (ou álgebra exterior)** de V, denotada por E como sendo a álgebra com base

$$\{1, e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \ldots < i_k, k \geq 1\}$$

e cujo produto é definido pelas relações

$$e_i^2 = 0 \text{ e } e_i e_j = -e_j e_i \text{ para quaisquer } i, j \in \mathbb{N}.$$

Álgebras

Destacamos em E os seguintes subespaços vetoriais:

- E_0, gerado por $\{1, e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_m} \mid m \text{ par}\}$.
- E_1, gerado por $\{e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k} \mid k \text{ ímpar}\}$.

- Claramente, $E = E_0 \oplus E_1$ como espaço vetorial.

Álgebras

Destacamos em E os seguintes subespaços vetoriais:

- E_0, gerado por $\{1, e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m} \mid m \text{ par}\}$.
- E_1, gerado por $\{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k} \mid k \text{ ímpar}\}$.

- Claramente, $E = E_0 \oplus E_1$ como espaço vetorial.

Álgebras

Destacamos em E os seguintes subespaços vetoriais:

- E_0, gerado por $\{1, e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_m} \mid m \text{ par}\}$.
- E_1, gerado por $\{e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k} \mid k \text{ ímpar}\}$.

- Claramente, $E = E_0 \oplus E_1$ como espaço vetorial.

Álgebras

Subálgebra

Um subespaço vetorial B de uma álgebra A será denominado de **subálgebra** de A se B é multiplicativamente fechado e $1 \in B$.

Ideal

Um subespaço vetorial I de uma álgebra A será denominado de **ideal** de A se $ax, \ xa \in I$ para quaisquer $a \in A$ e $x \in I$.

Álgebras

Subálgebra

Um subespaço vetorial B de uma álgebra A será denominado de **subálgebra** de A se B é multiplicativamente fechado e $1 \in B$.

Ideal

Um subespaço vetorial I de uma álgebra A será denominado de **ideal** de A se $ax, \ xa \in I$ para quaisquer $a \in A$ e $x \in I$.

Álgebras

Vejamos a seguir alguns exemplos importantes de subálgebras.

- **(Centro de uma álgebra)** Seja A uma álgebra. O conjunto $Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \forall x \in A\}$ é uma subálgebra de A denominada **centro de** A.

Destacamos em particular o centro das seguintes álgebras

- $Z(M_n(K)) = \{\lambda I_{n\times n} \mid \lambda \in K\}$ (matrizes escalares).
- $Z(E) = E_0$ ($char\ K \neq 2$).

Álgebras

Vejamos a seguir alguns exemplos importantes de subálgebras.

- **(Centro de uma álgebra)** Seja A uma álgebra. O conjunto $Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \forall x \in A\}$ é uma subálgebra de A denominada **centro de** A.

Destacamos em particular o centro das seguintes álgebras

- $Z(M_n(K)) = \{\lambda I_{n\times n} \mid \lambda \in K\}$ (matrizes escalares).
- $Z(E) = E_0$ (*char* $K \neq 2$).

Álgebras

Vejamos a seguir alguns exemplos importantes de subálgebras.

- **(Centro de uma álgebra)** Seja A uma álgebra. O conjunto $Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, \forall x \in A\}$ é uma subálgebra de A denominada **centro de** A.

Destacamos em particular o centro das seguintes álgebras

- $Z(M_n(K)) = \{\lambda I_{n\times n} \mid \lambda \in K\}$ (matrizes escalares).
- $Z(E) = E_0$ $(char\ K \neq 2)$.

Álgebras

- Consideremos a álgebra das matrizes $M_2(E)$. Seja:

$$M_{1,1}(E) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \middle| \, a, d \in E_0 \ , \ b, c \in E_1 \right\}.$$

É imediato que $M_{1,1}(E)$ é uma subálgebra de $M_2(E)$.

Álgebras

- Consideremos a álgebra das matrizes $M_2(E)$. Seja:

$$M_{1,1}(E) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \middle| \, a, d \in E_0 \, , \, b, c \in E_1 \right\}.$$

É imediato que $M_{1,1}(E)$ é uma subálgebra de $M_2(E)$.

Álgebras

- Consideremos a álgebra das matrizes $M_2(E)$. Seja:

$$M_{1,1}(E) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \middle| \, a, d \in E_0 \, , \; b, c \in E_1 \right\}.$$

É imediato que $M_{1,1}(E)$ é uma subálgebra de $M_2(E)$.

Álgebras

Subálgebra gerada

Sejam A uma álgebra e $\emptyset \neq S \subseteq A$. Consideremos o subespaço B_S de A gerado por

$$\{1, s_1 s_2 \dots s_k \mid k \in \mathbb{N}, s_i \in S\}.$$

B_S é uma subálgebra de A, chamada de **subálgebra gerada por** S.

Álgebras

Homomorfismo

Sejam A e B duas álgebras. Uma transformação linear $\phi : A \to B$ é um **homomorfismo**, se $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ para quaisquer $x, y \in A$ e além disso $\phi(1_A) = 1_B$.

Álgebras

Homomorfismo

Sejam A e B duas álgebras. Uma transformação linear $\phi : A \to B$ é um **homomorfismo**, se $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ para quaisquer $x, y \in A$ e além disso $\phi(1_A) = 1_B$.

Identidades Polinomiais

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto não vazio e enumerável de *variáveis* não comutativas. Vamos considerar a álgebra livre $K(X)$, cujos elementos são polinômios com variáveis em X.

Identidades Polinomiais

Identidades Polinomiais

Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in K(X)$ (ou a expressão $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$) é denominado uma **identidade polinomial** da álgebra A, se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$.

PI-álgebra

Uma **álgebra com identidade polinomial (PI-álgebra)** é uma álgebra que satisfaz uma identidade polinomial não trivial (polinômio não nulo).

Identidades Polinomiais

Identidades Polinomiais

Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ (ou a expressão $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$) é denominado uma **identidade polinomial** da álgebra A, se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$.

PI-álgebra

Uma **álgebra com identidade polinomial (PI-álgebra)** é uma álgebra que satisfaz uma identidade polinomial não trivial (polinômio não nulo).

Identidades Polinomiais

Chamamos de comutador de comprimento 2 o polinômio dado por $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$.

O comutador de comprimento n é definido indutivamente por $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$ para $n > 2$.

Exemplo: O polinômio $[x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial da álgebra de Grassmann E. Para ver isto, basta observar que $[a, b] \in E_0 \subseteq Z(E)$, para quaisquer $a, b \in E$.

Identidades Polinomiais

Chamamos de comutador de comprimento 2 o polinômio dado por $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$.

O comutador de comprimento n é definido indutivamente por $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$ para $n > 2$.

Exemplo: O polinômio $[x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial da álgebra de Grassmann E. Para ver isto, basta observar que $[a, b] \in E_0 \subseteq Z(E)$, para quaisquer $a, b \in E$.

Identidades Polinomiais

Chamamos de comutador de comprimento 2 o polinômio dado por $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$.

O comutador de comprimento n é definido indutivamente por $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$ para $n > 2$.

Exemplo: O polinômio $[x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial da álgebra de Grassmann E. Para ver isto, basta observar que $[a, b] \in E_0 \subseteq Z(E)$, para quaisquer $a, b \in E$.

Identidades Polinomiais

Chamamos de comutador de comprimento 2 o polinômio dado por $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$.

O comutador de comprimento n é definido indutivamente por $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$ para $n > 2$.

Exemplo: O polinômio $[x_1, x_2, x_3]$ é uma identidade polinomial da álgebra de Grassmann E. Para ver isto, basta observar que $[a, b] \in E_0 \subseteq Z(E)$, para quaisquer $a, b \in E$.

Identidades Polinomiais

T-ideal

Um ideal I de $K(X)$ é dito ser um T**-ideal** se $\phi(I) \subseteq I$ para todo $\phi \in End\ K(X)$, ou equivalentemente, se $f(g_1, \ldots, g_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e $g_1, \ldots, g_n \in K(X)$.

Proposição

O conjunto $T(A)$ das identidades de uma álgebra A é um T-ideal de $K(X)$.

Identidades Polinomiais

T-ideal

Um ideal I de $K\langle X\rangle$ é dito ser um T**-ideal** se $\phi(I) \subseteq I$ para todo $\phi \in End\ K\langle X\rangle$, ou equivalentemente, se $f(g_1, \ldots, g_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e $g_1, \ldots, g_n \in K\langle X\rangle$.

Proposição

O conjunto $T(A)$ das identidades de uma álgebra A é um T-ideal de $K\langle X\rangle$.

Identidades Polinomiais

T-ideal gerado

Seja S um subconjunto de $K(X)$. Definimos o **T-ideal gerado por** S, denotado por $\langle S\rangle^T$, como sendo a interseção de todos os T-ideais de $K(X)$ que contém S. Dessa forma, $\langle S\rangle^T$ é o menor T-ideal contendo S.

Do ponto de vista prático, o T-ideal gerado por S coincide com o subespaço vetorial de $K(X)$ gerado pelo conjunto

$$\{h_1 f(g_1, \ldots, g_n)h_2 \mid f \in S, h_1, h_2, g_1, \ldots, g_n \in K(X)\}.$$

Identidades Polinomiais

T-ideal gerado

Seja S um subconjunto de $K(X)$. Definimos o **T-ideal gerado por** S, denotado por $\langle S \rangle^T$, como sendo a interseção de todos os T-ideais de $K(X)$ que contém S. Dessa forma, $\langle S \rangle^T$ é o menor T-ideal contendo S.

Do ponto de vista prático, o T-ideal gerado por S coincide com o subespaço vetorial de $K(X)$ gerado pelo conjunto

$$\{h_1 f(g_1, \ldots, g_n) h_2 \mid f \in S, h_1, h_2, g_1, \ldots, g_n \in K(X)\}.$$

Identidades Polinomiais

Se A é uma álgebra e $S \subseteq T(A)$ é tal que $T(A) = \langle S \rangle^T$ dizemos que S é uma **base das identidades** de A. Se um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in \langle S \rangle^T$ dizemos que f segue de S, ou que f é uma consequência de S.

Exemplo: Se A é uma álgebra comutativa e K é um corpo infinito, então $T(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle^T$.

Identidades Polinomiais

Se A é uma álgebra e $S \subseteq T(A)$ é tal que $T(A) = \langle S \rangle^T$ dizemos que S é uma **base das identidades** de A. Se um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in \langle S \rangle^T$ dizemos que f segue de S, ou que f é uma consequência de S.

Exemplo: Se A é uma álgebra comutativa e K é um corpo infinito, então $T(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle^T$.

Identidades Polinomiais

Se A é uma álgebra e $S \subseteq T(A)$ é tal que $T(A) = \langle S \rangle^T$ dizemos que S é uma **base das identidades** de A. Se um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in \langle S \rangle^T$ dizemos que f segue de S, ou que f é uma consequência de S.

Exemplo: Se A é uma álgebra comutativa e K é um corpo infinito, então $T(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle^T$.

Polinômios multi-homogêneos e multilineares

Sejam $m \in K\langle X\rangle$ um monômio e $x_i \in X$.

Grau de uma variável

Definimos o **grau** de x_i em m, denotado por $deg_{x_i} m$, como sendo o número de ocorrências de x_i em m.

Um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ é dito:

- **Homogêneo em** x_i: Se todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i.
- **Multi-homogêneo**: Se é homogêneo em todas as variáveis.
- **Multilinear**: Se é multihomogêneo e em todos os monômios cada variável tem grau exatamente 1.

Polinômios multi-homogêneos e multilineares

Sejam $m \in K(X)$ um monômio e $x_i \in X$.

Grau de uma variável

Definimos o **grau** de x_i em m, denotado por $deg_{x_i} m$, como sendo o número de ocorrências de x_i em m.

Um polinômio $f \in K(X)$ é dito:

- **Homogêneo em** x_i: Se todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i.
- **Multi-homogêneo**: Se é homogêneo em todas as variáveis.
- **Multilinear**: Se é multihomogêneo e em todos os monômios cada variável tem grau exatamente 1.

Polinômios multi-homogêneos e multilineares

Sejam $m \in K(X)$ um monômio e $x_i \in X$.

Grau de uma variável

Definimos o **grau** de x_i em m, denotado por $deg_{x_i} m$, como sendo o número de ocorrências de x_i em m.

Um polinômio $f \in K(X)$ é dito:

- **Homogêneo em** x_i: Se todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i.
- **Multi-homogêneo**: Se é homogêneo em todas as variáveis.
- **Multilinear**: Se é multihomogêneo e em todos os monômios cada variável tem grau exatamente 1.

Polinômios multi-homogêneos e multilineares

Sejam $m \in K(X)$ um monômio e $x_i \in X$.

Grau de uma variável

Definimos o **grau** de x_i em m, denotado por $deg_{x_i} m$, como sendo o número de ocorrências de x_i em m.

Um polinômio $f \in K(X)$ é dito:

- **Homogêneo em** x_i: Se todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i.
- **Multi-homogêneo**: Se é homogêneo em todas as variáveis.
- **Multilinear**: Se é multihomogêneo e em todos os monômios cada variável tem grau exatamente 1.

Polinômios multi-homogêneos e multilineares

Sejam $m \in K(X)$ um monômio e $x_i \in X$.

Grau de uma variável

Definimos o **grau** de x_i em m, denotado por $deg_{x_i} m$, como sendo o número de ocorrências de x_i em m.

Um polinômio $f \in K(X)$ é dito:

- **Homogêneo em x_i**: Se todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i.
- **Multi-homogêneo**: Se é homogêneo em todas as variáveis.
- **Multilinear**: Se é multihomogêneo e em todos os monômios cada variável tem grau exatamente 1.

Polinômios multi-homogêneos e multilineares

Sejam $m \in K(X)$ um monômio e $x_i \in X$.

Grau de uma variável

Definimos o **grau** de x_i em m, denotado por $deg_{x_i}m$, como sendo o número de ocorrências de x_i em m.

Um polinômio $f \in K(X)$ é dito:

- **Homogêneo em** x_i: Se todos os seus monômios têm o mesmo grau em x_i.
- **Multi-homogêneo**: Se é homogêneo em todas as variáveis.
- **Multilinear**: Se é multihomogêneo e em todos os monômios cada variável tem grau exatamente 1.

Polinômios multi-homogêneos e multilineares

Se $m = m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ é um monômio de $K(X)$, o **multigrau** de m é a k-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ onde $a_i = deg_{x_i} m$. A soma de todos os monômios de $f \in K(X)$ com um dado multigrau, é dito ser uma **componente multi-homogênea** de f.

Polinômios multi-homogêneos e multilineares

Se $m = m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ é um monômio de $K(X)$, o **multigrau** de m é a k-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ onde $a_i = deg_{x_i} m$. A soma de todos os monômios de $f \in K(X)$ com um dado multigrau, é dito ser uma **componente multi-homogênea** de f.

Polinômios multi-homogêneos e multilineares

Proposição 1

- Sejam I um T-ideal de $K(X)$ e $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in I$. Se K é infinito então cada componente multi-homogênea de f pertence a I. Consequentemente, I é gerado por seus polinômios multi-homogêneos.
- Se I é um T-ideal de $K(X)$ e $charK = 0$, então I é gerado por seus polinômios multilineares.

Polinômios multi-homogêneos e multilineares

Proposição 1

- Sejam I um T-ideal de $K(X)$ e $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in I$. Se K é infinito então cada componente multi-homogênea de f pertence a I. Consequentemente, I é gerado por seus polinômios multi-homogêneos.
- Se I é um T-ideal de $K(X)$ e $charK = 0$, então I é gerado por seus polinômios multilineares.

T-espaços e polinômios centrais

Polinômios Centrais

Sejam A uma álgebra e $f(x_1, \ldots, x_n) \in K(X)$. Dizemos que f é um **polinômio central** para A se f tem termo constante nulo e $f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A)$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$

Exemplo: Sendo A uma álgebra, toda identidade de A é um polinômio central para A. As identidades são ditas **polinômios centrais triviais**.

T-espaços e polinômios centrais

Polinômios Centrais

Sejam A uma álgebra e $f(x_1, \ldots, x_n) \in K(X)$. Dizemos que f é um **polinômio central** para A se f tem termo constante nulo e $f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A)$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$

Exemplo: Sendo A uma álgebra, toda identidade de A é um polinômio central para A. As identidades são ditas **polinômios centrais triviais**.

T-espaços e polinômios centrais

Polinômios Centrais

Sejam A uma álgebra e $f(x_1, \ldots, x_n) \in K(X)$. Dizemos que f é um **polinômio central** para A se f tem termo constante nulo e $f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A)$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$

Exemplo: Sendo A uma álgebra, toda identidade de A é um polinômio central para A. As identidades são ditas **polinômios centrais triviais**.

T-espaços e polinômios centrais

T-espaço

Um subespaço V de $K(X)$ é um T-espaço se $\varphi(V) \subseteq V$ para todo $\varphi \in End\ K(X)$, ou equivalentemente, $f(g_1, \ldots, g_n) \in V$ para quaisquer $f(x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $g_1, \ldots, g_n \in K(X)$.

Exemplo 1: Todo T-ideal de $K(X)$ é um T-espaço.

Exemplo 2: Sejam A uma álgebra. O conjunto

$$\mathcal{L} = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in K(X) \mid f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A)\ para\ a_1, \ldots, a_n \in A\}$$

é um T-espaço de $K(X)$. T-espaço $\mathcal{L}$ é conhecido por **espaço dos polinômios centrais** de A e denotado por $C(A)$.

T-espaços e polinômios centrais

T-espaço

Um subespaço V de $K(X)$ é um T-espaço se $\varphi(V) \subseteq V$ para todo $\varphi \in End\ K(X)$, ou equivalentemente, $f(g_1, \ldots, g_n) \in V$ para quaisquer $f(x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $g_1, \ldots, g_n \in K(X)$.

Exemplo 1: Todo T-ideal de $K(X)$ é um T-espaço.

Exemplo 2: Sejam A uma álgebra. O conjunto

$$\mathcal{L} = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in K(X) \mid f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A) \ para\ a_1, \ldots, a_n \in A\}$$

é um T-espaço de $K(X)$. T-espaço $\mathcal{L}$ é conhecido por **espaço dos polinômios centrais** de A e denotado por $C(A)$.

T-espaços e polinômios centrais

T-espaço

Um subespaço V de $K(X)$ é um T-espaço se $\varphi(V) \subseteq V$ para todo $\varphi \in End\ K(X)$, ou equivalentemente, $f(g_1, \ldots, g_n) \in V$ para quaisquer $f(x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $g_1, \ldots, g_n \in K(X)$.

Exemplo 1: Todo T-ideal de $K(X)$ é um T-espaço.

Exemplo 2: Sejam A uma álgebra. O conjunto

$$\mathcal{L} = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in K(X) \mid f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A)\ para\ a_1, \ldots, a_n \in A\}$$

é um T-espaço de $K(X)$. T-espaço $\mathcal{L}$ é conhecido por **espaço dos polinômios centrais** de A e denotado por $C(A)$.

T-espaços e polinômios centrais

Dado um subconjunto S de $K(X)$, definimos o *T-espaço gerado por S* como sendo a interseção de todos os T-espaços que contêm S, ou seja, o *menor T-espaço* de $K(X)$ que contém S.

Proposição

Se $S \subseteq K(X)$ e V é o T-espaço de $K(X)$ gerado por S, então V é o subespaço de $K(X)$ gerado por

$$\{f(g_1, \ldots, g_n) \mid f \in S, \; g_1, \ldots, g_n \in K(X)\}.$$

T-espaços e polinômios centrais

Dado um subconjunto S de $K(X)$, definimos o *T-espaço gerado por S* como sendo a interseção de todos os T-espaços que contêm S, ou seja, o *menor T-espaço* de $K(X)$ que contém S.

Proposição

Se $S \subseteq K(X)$ e V é o T-espaço de $K(X)$ gerado por S, então V é o subespaço de $K(X)$ gerado por

$$\{f(g_1, \ldots, g_n) \mid f \in S,\ g_1, \ldots, g_n \in K(X)\}.$$

Identidades e polinômios centrais graduados

No que segue G denotará um grupo abeliano com notação aditiva.

Álgebra G-graduada

Seja A uma álgebra. Uma G-**graduação** em A é uma família $\{A_g \mid g \in G\}$ de subespaços de A tais que

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g \quad e \quad A_g A_h \subseteq A_{g+h}$$

para quaisquer $g, h \in G$. Definimos uma **álgebra G-graduada** como sendo uma álgebra munida de uma G-graduação.

Na definição acima, o subespaço A_g é chamado de *componente homogênea* de grau g e os seus elementos de *elementos homogêneos* de grau g.

Identidades e polinômios centrais graduados

No que segue G denotará um grupo abeliano com notação aditiva.

Álgebra G-graduada

Seja A uma álgebra. Uma G**-graduação** em A é uma família $\{A_g \mid g \in G\}$ de subespaços de A tais que

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g \quad e \quad A_g A_h \subseteq A_{g+h}$$

para quaisquer $g, h \in G$. Definimos uma **álgebra G-graduada** como sendo uma álgebra munida de uma G-graduação.

Na definição acima, o subespaço A_g é chamado de *componente homogênea* de grau g e os seus elementos de *elementos homogêneos* de grau g.

Identidades e polinômios centrais graduados

No que segue G denotará um grupo abeliano com notação aditiva.

Álgebra G-graduada

Seja A uma álgebra. Uma G-**graduação** em A é uma família $\{A_g \mid g \in G\}$ de subespaços de A tais que

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g \quad e \quad A_g A_h \subseteq A_{g+h}$$

para quaisquer $g, h \in G$. Definimos uma **álgebra** G**-graduada** como sendo uma álgebra munida de uma G-graduação.

Na definição acima, o subespaço A_g é chamado de *componente homogênea* de grau g e os seus elementos de *elementos homogêneos* de grau g.

Identidades e polinômios centrais graduados

No que segue G denotará um grupo abeliano com notação aditiva.

Álgebra G-graduada

Seja A uma álgebra. Uma G-**graduação** em A é uma família $\{A_g \mid g \in G\}$ de subespaços de A tais que

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g \quad e \quad A_g A_h \subseteq A_{g+h}$$

para quaisquer $g, h \in G$. Definimos uma **álgebra** G**-graduada** como sendo uma álgebra munida de uma G-graduação.

Na definição acima, o subespaço A_g é chamado de *componente homogênea* de grau g e os seus elementos de *elementos homogêneos* de grau g.

Identidades e polinômios centrais graduados

Exemplo 1: A Álgebra $M_2(K)$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural, a qual definiremos agora. Tomando

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, a, d \in K \right\} \quad \text{e} \quad A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle| \, b, c \in K \right\}$$

temos que $M_2(K) = A_0 \oplus A_1$ (como espaço vetorial) e também que $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Identidades e polinômios centrais graduados

Exemplo 1: A Álgebra $M_2(K)$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural, a qual definiremos agora. Tomando

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, a, d \in K \right\} \quad \text{e} \quad A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle| \, b, c \in K \right\}$$

temos que $M_2(K) = A_0 \oplus A_1$ (como espaço vetorial) e também que $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Identidades e polinômios centrais graduados

Exemplo 1: A Álgebra $M_2(K)$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural, a qual definiremos agora. Tomando

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, a, d \in K \right\} \quad \text{e} \quad A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle| \, b, c \in K \right\}$$

temos que $M_2(K) = A_0 \oplus A_1$ (como espaço vetorial) e também que $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Identidades e polinômios centrais graduados

Exemplo 1: A Álgebra $M_2(K)$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural, a qual definiremos agora. Tomando

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, a, d \in K \right\} \quad \text{e} \quad A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle| \, b, c \in K \right\}$$

temos que $M_2(K) = A_0 \oplus A_1$ (como espaço vetorial) e também que $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Identidades e polinômios centrais graduados

Exemplo 2: A Álgebra $M_{1,1}(E)$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural. Tomando agora os subespaços de $M_{1,1}(E)$:

$$M_{1,1}(E)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| a, d \in E_0 \right\}$$

e

$$M_{1,1}(E)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle| b, c \in E_1 \right\}$$

Temos:

- $M_{1,1}(E) = M_{1,1}(E)_0 \oplus M_{1,1}(E)_1$;
- $M_{1,1}(E)_i M_{1,1}(E)_j \subseteq M_{1,1}(E)_{i+j}$, para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Identidades e polinômios centrais graduados

Exemplo 2: A Álgebra $M_{1,1}(E)$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural. Tomando agora os subespaços de $M_{1,1}(E)$:

$$M_{1,1}(E)_0 = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & d \end{array} \right) \middle| \, a, d \in E_0 \right\}$$

e

$$M_{1,1}(E)_1 = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & b \\ c & 0 \end{array} \right) \middle| \, b, c \in E_1 \right\}$$

Temos:

- $M_{1,1}(E) = M_{1,1}(E)_0 \oplus M_{1,1}(E)_1$;
- $M_{1,1}(E)_i M_{1,1}(E)_j \subseteq M_{1,1}(E)_{i+j}$, para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Identidades e polinômios centrais graduados

Exemplo 2: A Álgebra $M_{1,1}(E)$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural. Tomando agora os subespaços de $M_{1,1}(E)$:

$$M_{1,1}(E)_0 = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & d \end{array} \right) \middle| \, a, d \in E_0 \right\}$$

e

$$M_{1,1}(E)_1 = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & b \\ c & 0 \end{array} \right) \middle| \, b, c \in E_1 \right\}$$

Temos:

- $M_{1,1}(E) = M_{1,1}(E)_0 \oplus M_{1,1}(E)_1$;
- $M_{1,1}(E)_i M_{1,1}(E)_j \subseteq M_{1,1}(E)_{i+j}$, para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Identidades e polinômios centrais graduados

Exemplo 2: A Álgebra $M_{1,1}(E)$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural. Tomando agora os subespaços de $M_{1,1}(E)$:

$$M_{1,1}(E)_0 = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & d \end{array} \right) \middle| a, d \in E_0 \right\}$$

e

$$M_{1,1}(E)_1 = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & b \\ c & 0 \end{array} \right) \middle| b, c \in E_1 \right\}$$

Temos:

- $M_{1,1}(E) = M_{1,1}(E)_0 \oplus M_{1,1}(E)_1$;
- $M_{1,1}(E)_i M_{1,1}(E)_j \subseteq M_{1,1}(E)_{i+j}$, para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Identidades e polinômios centrais graduados

Exemplo 2: A Álgebra $M_{1,1}(E)$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural. Tomando agora os subespaços de $M_{1,1}(E)$:

$$M_{1,1}(E)_0 = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & d \end{array} \right) \middle| \, a, d \in E_0 \right\}$$

e

$$M_{1,1}(E)_1 = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & b \\ c & 0 \end{array} \right) \middle| \, b, c \in E_1 \right\}$$

Temos:

- $M_{1,1}(E) = M_{1,1}(E)_0 \oplus M_{1,1}(E)_1$;
- $M_{1,1}(E)_i M_{1,1}(E)_j \subseteq M_{1,1}(E)_{i+j}$, para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Identidades e polinômios centrais graduados

Exemplo 3: A álgebra $E \otimes E$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural. Tomando agora os subespaços de $E \otimes E$:

$$(E \otimes E)_0 = (E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1) \quad \text{e} \quad (E \otimes E)_1 = (E_0 \otimes E_1) \oplus (E_1 \otimes E_0)$$

. Temos:

- $E \otimes E = (E \otimes E)_0 \oplus (E \otimes E)_1$;
- $(E \otimes E)_i (E \otimes E)_j \subseteq (E \otimes E)_{i+j}$, para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Identidades e polinômios centrais graduados

Exemplo 3: A álgebra $E \otimes E$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural. Tomando agora os subespaços de $E \otimes E$:

$$(E \otimes E)_0 = (E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1) \quad \text{e} \quad (E \otimes E)_1 = (E_0 \otimes E_1) \oplus (E_1 \otimes E_0)$$

. Temos:

- $E \otimes E = (E \otimes E)_0 \oplus (E \otimes E)_1$;
- $(E \otimes E)_i (E \otimes E)_j \subseteq (E \otimes E)_{i+j}$, para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Identidades e polinômios centrais graduados

Exemplo 3: A álgebra $E \otimes E$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural. Tomando agora os subespaços de $E \otimes E$:

$$(E \otimes E)_0 = (E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1) \quad \text{e} \quad (E \otimes E)_1 = (E_0 \otimes E_1) \oplus (E_1 \otimes E_0)$$

. Temos:

- $E \otimes E = (E \otimes E)_0 \oplus (E \otimes E)_1$;
- $(E \otimes E)_i (E \otimes E)_j \subseteq (E \otimes E)_{i+j}$, para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Identidades e polinômios centrais graduados

Exemplo 3: A álgebra $E \otimes E$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural. Tomando agora os subespaços de $E \otimes E$:

$$(E\otimes E)_0 = (E_0\otimes E_0)\oplus(E_1\otimes E_1) \quad \text{e} \quad (E\otimes E)_1 = (E_0\otimes E_1)\oplus(E_1\otimes E_0)$$

. Temos:

- $E \otimes E = (E \otimes E)_0 \oplus (E \otimes E)_1$;
- $(E \otimes E)_i(E \otimes E)_j \subseteq (E \otimes E)_{i+j}$, para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Identidades e polinômios centrais graduados

Homomorfismo G-graduado

Uma aplicação $\psi : A \longrightarrow B$ entre álgebras G-graduadas é chamada **homomorfismo G-graduado**, se ψ é um homomorfismo de álgebras que satisfaz $\psi(A_g) \subseteq B_g$ para todo $g \in G$.

Identidades e polinômios centrais graduados

Consideremos uma família $\{X_g \mid g \in G\}$ de conjuntos enumeráveis e dois a dois disjuntos. Tomemos então $X = \bigcup_{g \in G} X_g$ e consideremos a álgebra associativa livre unitária $K(X)$. Definimos

- $\alpha(1) = 0$ e $\alpha(x_1 x_2 \ldots x_m) = \alpha(x_1) + \alpha(x_2) + \ldots + \alpha(x_m)$, onde $\alpha(x_i) = g$ se $x_i \in X_g$.
- $K(X)_g = \langle m \mid m$ é monômio de $K(X), \alpha(m) = g \rangle$
- $K(X) = \bigoplus_{g \in G} K(X)_g$
- $K(X)_g K(X)_h \subseteq K(X)_{g+h}$

A álgebra $K(X)$ é G-graduada e chamada de *álgebra associativa livre G-graduada*.

Identidades e polinômios centrais graduados

Consideremos uma família $\{X_g \mid g \in G\}$ de conjuntos enumeráveis e dois a dois disjuntos. Tomemos então $X = \bigcup_{g \in G} X_g$ e consideremos a álgebra associativa livre unitária $K(X)$. Definimos

- $\alpha(1) = 0$ e $\alpha(x_1 x_2 \dots x_m) = \alpha(x_1) + \alpha(x_2) + \dots + \alpha(x_m)$, onde $\alpha(x_i) = g$ se $x_i \in X_g$.
- $K(X)_g = \langle m \mid m \text{ é monômio de } K(X), \alpha(m) = g \rangle$
- $K(X) = \bigoplus_{g \in G} K(X)_g$
- $K(X)_g K(X)_h \subseteq K(X)_{g+h}$

A álgebra $K(X)$ é G-graduada e chamada de *álgebra associativa livre G-graduada*.

Identidades e polinômios centrais graduados

Consideremos uma família $\{X_g \mid g \in G\}$ de conjuntos enumeráveis e dois a dois disjuntos. Tomemos então $X = \bigcup_{g\in G} X_g$ e consideremos a álgebra associativa livre unitária $K(X)$. Definimos

- $\alpha(1) = 0$ e $\alpha(x_1x_2\ldots x_m) = \alpha(x_1) + \alpha(x_2) + \ldots + \alpha(x_m)$, onde $\alpha(x_i) = g$ se $x_i \in X_g$.
- $K(X)_g = \langle m \mid m$ é monômio de $K(X)$, $\alpha(m) = g\rangle$
- $K(X) = \bigoplus_{g\in G} K(X)_g$
- $K(X)_gK(X)_h \subseteq K(X)_{g+h}$

A álgebra $K(X)$ é G-graduada e chamada de *álgebra associativa livre G-graduada*.

Identidades e polinômios centrais graduados

Consideremos uma família $\{X_g \mid g \in G\}$ de conjuntos enumeráveis e dois a dois disjuntos. Tomemos então $X = \bigcup_{g \in G} X_g$ e consideremos a álgebra associativa livre unitária $K(X)$. Definimos

- $\alpha(1) = 0$ e $\alpha(x_1 x_2 \ldots x_m) = \alpha(x_1) + \alpha(x_2) + \ldots + \alpha(x_m)$, onde $\alpha(x_i) = g$ se $x_i \in X_g$.
- $K(X)_g = \langle m \mid m$ é monômio de $K(X)$, $\alpha(m) = g\rangle$
- $K(X) = \bigoplus_{g \in G} K(X)_g$
- $K(X)_g K(X)_h \subseteq K(X)_{g+h}$

A álgebra $K(X)$ é G-graduada e chamada de *álgebra associativa livre G-graduada*.

Identidades e polinômios centrais graduados

Consideremos uma família $\{X_g \mid g \in G\}$ de conjuntos enumeráveis e dois a dois disjuntos. Tomemos então $X = \bigcup_{g \in G} X_g$ e consideremos a álgebra associativa livre unitária $K(X)$. Definimos

- $\alpha(1) = 0$ e $\alpha(x_1 x_2 \ldots x_m) = \alpha(x_1) + \alpha(x_2) + \ldots + \alpha(x_m)$, onde $\alpha(x_i) = g$ se $x_i \in X_g$.
- $K(X)_g = \langle m \mid m$ é monômio de $K(X), \alpha(m) = g\rangle$
- $K(X) = \bigoplus_{g \in G} K(X)_g$
- $K(X)_g K(X)_h \subseteq K(X)_{g+h}$

A álgebra $K(X)$ é G-graduada e chamada de *álgebra associativa livre G-graduada*.

Identidades e polinômios centrais graduados

Consideremos uma família $\{X_g \mid g \in G\}$ de conjuntos enumeráveis e dois a dois disjuntos. Tomemos então $X = \bigcup_{g \in G} X_g$ e consideremos a álgebra associativa livre unitária $K(X)$. Definimos

- $\alpha(1) = 0$ e $\alpha(x_1 x_2 \dots x_m) = \alpha(x_1) + \alpha(x_2) + \dots + \alpha(x_m)$, onde $\alpha(x_i) = g$ se $x_i \in X_g$.
- $K(X)_g = \langle m \mid m$ é monômio de $K(X)$, $\alpha(m) = g\rangle$
- $K(X) = \bigoplus_{g \in G} K(X)_g$
- $K(X)_g K(X)_h \subseteq K(X)_{g+h}$

A álgebra $K(X)$ é G-graduada e chamada de *álgebra associativa livre G-graduada*.

Identidades e polinômios centrais graduados

Consideremos uma família $\{X_g \mid g \in G\}$ de conjuntos enumeráveis e dois a dois disjuntos. Tomemos então $X = \bigcup_{g \in G} X_g$ e consideremos a álgebra associativa livre unitária $K(X)$. Definimos

- $\alpha(1) = 0$ e $\alpha(x_1 x_2 \ldots x_m) = \alpha(x_1) + \alpha(x_2) + \ldots + \alpha(x_m)$, onde $\alpha(x_i) = g$ se $x_i \in X_g$.
- $K(X)_g = \langle m \mid m$ é monômio de $K(X)$, $\alpha(m) = g\rangle$
- $K(X) = \bigoplus_{g \in G} K(X)_g$
- $K(X)_g K(X)_h \subseteq K(X)_{g+h}$

A álgebra $K(X)$ é G-graduada e chamada de *álgebra associativa livre G-graduada*.

Identidades e polinômios centrais graduados

Exemplo: A álgebra associativa livre $\mathbb{Z}_2$-graduada, que tem fundamental importância neste trabalho, será denotada por $K(X \cup Y)$, onde:

- $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ é o conjunto das variáveis de grau 0;
- $Y = \{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$ é o conjunto das variáveis de grau 1.

Identidades e polinômios centrais graduados

Exemplo: A álgebra associativa livre $\mathbb{Z}_2$-graduada, que tem fundamental importância neste trabalho, será denotada por $K(X \cup Y)$, onde:

- $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ é o conjunto das variáveis de grau 0;
- $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$ é o conjunto das variáveis de grau 1.

Identidades e polinômios centrais graduados

Exemplo: A álgebra associativa livre $\mathbb{Z}_2$-graduada, que tem fundamental importância neste trabalho, será denotada por $K(X \cup Y)$, onde:

- $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ é o conjunto das variáveis de grau 0;
- $Y = \{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$ é o conjunto das variáveis de grau 1.

Identidades e polinômios centrais graduados

Identidades e polinômios centrais graduados

Seja $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. Dizemos que um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X \rangle$ é

i) uma **identidade polinomial G-graduada** para A, se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_i \in A_{\alpha(x_i)}$ com $i = 1, 2, \ldots, n$.

ii) um **polinômio central G-graduado** para A, se $f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A)$ para quaisquer $a_i \in A_{\alpha(x_i)}$ com $i = 1, 2, \ldots, n$.

Identidades e polinômios centrais graduados

Identidades e polinômios centrais graduados

Seja $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. Dizemos que um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ é

i) uma **identidade polinomial *G*-graduada** para A, se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_i \in A_{\alpha(x_i)}$ com $i = 1, 2, \ldots, n$.

ii) um **polinômio central *G*-graduado** para A, se $f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A)$ para quaisquer $a_i \in A_{\alpha(x_i)}$ com $i = 1, 2, \ldots, n$.

Identidades e polinômios centrais graduados

Identidades e polinômios centrais graduados

Seja $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. Dizemos que um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K(X)$ é

i) uma **identidade polinomial G-graduada** para A, se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_i \in A_{\alpha(x_i)}$ com $i = 1, 2, \ldots, n$.

ii) um **polinômio central G-graduado** para A, se $f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A)$ para quaisquer $a_i \in A_{\alpha(x_i)}$ com $i = 1, 2, \ldots, n$.

Polinômios Centrais para álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas

- Em 1992, Di Vicenzo apresentou as descrições das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para as álgebras $M_2(K)$, $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$, quando *char* $K = 0$.
- Em 2002, Azevedo e Koshlukov generalizaram estas descrições para corpos infinitos de característica diferente de 2.
- Em 2007, Brandão e Koshlukov apresentaram as descrições dos polinômios centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para as álgebras $M_2(K)$, $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$, onde K é um corpo infinito e de característica diferente de 2.

Polinômios Centrais para álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas

- Em 1992, Di Vicenzo apresentou as descrições das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para as álgebras $M_2(K)$, $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$, quando *char* $K = 0$.
- Em 2002, Azevedo e Koshlukov generalizaram estas descrições para corpos infinitos de característica diferente de 2.
- Em 2007, Brandão e Koshlukov apresentaram as descrições dos polinômios centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para as álgebras $M_2(K)$, $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$, onde K é um corpo infinito e de característica diferente de 2.

Polinômios Centrais para álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas

- Em 1992, Di Vicenzo apresentou as descrições das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para as álgebras $M_2(K)$, $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$, quando *char* $K = 0$.
- Em 2002, Azevedo e Koshlukov generalizaram estas descrições para corpos infinitos de característica diferente de 2.
- Em 2007, Brandão e Koshlukov apresentaram as descrições dos polinômios centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para as álgebras $M_2(K)$, $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$, onde K é um corpo infinito e de característica diferente de 2.

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $M_2(K)$

No que segue K denotará um corpo infinito de característica diferente de 2.

Denotaremos $T_{\mathbb{Z}_2}$ simplesmente por T_2 e $C_{\mathbb{Z}_2}$ simplesmente por C_2.

Teorema 1 (Azevedo - Koshlukov)

O T_2-ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_2(K)$ é gerado pelos polinômios $[x_1, x_2]$ e $y_1y_2y_3 - y_3y_2y_1$.

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $M_2(K)$

No que segue K denotará um corpo infinito de característica diferente de 2.

Denotaremos $T_{\mathbb{Z}_2}$ simplesmente por T_2 e $C_{\mathbb{Z}_2}$ simplesmente por C_2.

Teorema 1 (Azevedo - Koshlukov)

O T_2-ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_2(K)$ é gerado pelos polinômios $[x_1, x_2]$ e $y_1y_2y_3 - y_3y_2y_1$.

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $M_2(K)$

No que segue K denotará um corpo infinito de característica diferente de 2.

Denotaremos $T_{\mathbb{Z}_2}$ simplesmente por T_2 e $C_{\mathbb{Z}_2}$ simplesmente por C_2.

Teorema 1 (Azevedo - Koshlukov)

O T_2-ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_2(K)$ é gerado pelos polinômios $[x_1, x_2]$ e $y_1 y_2 y_3 - y_3 y_2 y_1$.

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $M_2(K)$

Denotaremos por $I = T_2(M_2(K))$.

Sendo A uma álgebra e $a, b \in A$, definimos o produto de Jordan $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.

Consideremos o T$_2$-espaço V de $K(X \cup Y)$ gerado pelos polinômios

$$z_1[x_1, x_2]z_2 \quad , \quad z_1(y_1y_2y_3 - y_3y_2y_1)z_2 \quad , \quad y_1^2$$

onde z_1 e z_2 são variáveis em $X \cup Y$.

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $M_2(K)$

Denotaremos por $I = T_2(M_2(K))$.

Sendo A uma álgebra e $a, b \in A$, definimos o produto de Jordan $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.

Consideremos o T_2-espaço V de $K(X \cup Y)$ gerado pelos polinômios

$$z_1[x_1, x_2]z_2 \quad , \quad z_1(y_1y_2y_3 - y_3y_2y_1)z_2 \quad , \quad y_1^2$$

onde z_1 e z_2 são variáveis em $X \cup Y$.

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $M_2(K)$

Denotaremos por $I = T_2(M_2(K))$.

Sendo A uma álgebra e $a, b \in A$, definimos o produto de Jordan $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.

Consideremos o T_2-espaço V de $K(X \cup Y)$ gerado pelos polinômios

$$z_1[x_1, x_2]z_2 \quad , \quad z_1(y_1y_2y_3 - y_3y_2y_1)z_2 \quad , \quad y_1^2$$

onde z_1 e z_2 são variáveis em $X \cup Y$.

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $M_2(K)$

Lema 1

$V \subseteq C_2(M_2(K))$ e $I \subseteq V$.

Lema 2

Os polinômios $y_1 \circ y_2$, $y_1^2 y_2^2$ e $[y_1, y_2][y_3, y_4]$ pertencem a V. Além disso, V é multiplicativamente fechado.

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $M_2(K)$

Lema 1

$V \subseteq C_2(M_2(K))$ e $I \subseteq V$.

Lema 2

Os polinômios $y_1 \circ y_2$, $y_1^2 y_2^2$ e $[y_1, y_2][y_3, y_4]$ pertencem a V. Além disso, V é multiplicativamente fechado.

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $M_2(K)$

Lema 1

$V \subseteq C_2(M_2(K))$ e $I \subseteq V$.

Lema 2

Os polinômios $y_1 \circ y_2$, $y_1^2 y_2^2$ e $[y_1, y_2][y_3, y_4]$ pertencem a V. Além disso, V é multiplicativamente fechado.

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $M_2(K)$

Teorema 2 (Brandão - Koshlukov)

$C_2(M_2(K)) = V$.

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $M_{1,1}(E)$

Teorema 3 (Azevedo - Koshlukov)

O T_2-ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{1,1}(E)$ é gerado pelos polinômios $[x_1, x_2]$ e $y_1 y_2 y_3 + y_3 y_2 y_1$.

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $M_{1,1}(E)$

O centro da álgebra $M_{1,1}(E)$ consiste das matrizes $\{aI_2 | a \in E_0\}$, onde I_2 é a matriz identidade de ordem 2.

Consideremos W o T_2-espaço de $K(X \cup Y)$ gerado pelos polinômios

$$z_1[x_1, x_2]z_2 \quad , \quad z_1(y_1y_2y_3 + y_3y_2y_1)z_2 \quad , \quad [y_1, y_2]$$

onde z_1 e z_2 são variáveis em $X \cup Y$.

Teorema 4 (Brandão - Koshlukov)

$C_2(M_{1,1}(E)) = W$

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $M_{1,1}(E)$

O centro da álgebra $M_{1,1}(E)$ consiste das matrizes $\{aI_2 | a \in E_0\}$, onde I_2 é a matriz identidade de ordem 2.

Consideremos W o T_2-espaço de $K(X \cup Y)$ gerado pelos polinômios

$$z_1[x_1, x_2]z_2 \quad , \quad z_1(y_1y_2y_3 + y_3y_2y_1)z_2 \quad , \quad [y_1, y_2]$$

onde z_1 e z_2 são variáveis em $X \cup Y$.

Teorema 4 (Brandão - Koshlukov)

$C_2(M_{1,1}(E)) = W$

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $M_{1,1}(E)$

O centro da álgebra $M_{1,1}(E)$ consiste das matrizes $\{aI_2 | a \in E_0\}$, onde I_2 é a matriz identidade de ordem 2.

Consideremos W o T$_2$-espaço de $K(X \cup Y)$ gerado pelos polinômios

$$z_1[x_1, x_2]z_2 \quad , \quad z_1(y_1 y_2 y_3 + y_3 y_2 y_1)z_2 \quad , \quad [y_1, y_2]$$

onde z_1 e z_2 são variáveis em $X \cup Y$.

Teorema 4 (Brandão - Koshlukov)

$C_2(M_{1,1}(E)) = W$

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $E \otimes E$

Di Vicenzo, mostrou que, em característica zero, as álgebras $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ possuem as mesmas identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas e portanto $C_2(M_{1,1}(E)) = C_2(E \otimes E)$.

Vamos supor então que K é infinito e $char\ K = p > 2$.

Teorema 5 (Azevedo - Koshlukov)

O T_2-ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $E \otimes E$ é gerado pelos polinômios

$$[x_1, x_2] \quad , \quad (y_1 y_2 y_3 + y_3 y_2 y_1) \quad \text{e} \quad [x_1^p, y_1].$$

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $E \otimes E$

Di Vicenzo, mostrou que, em característica zero, as álgebras $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ possuem as mesmas identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas e portanto $C_2(M_{1,1}(E)) = C_2(E \otimes E)$.

Vamos supor então que K é infinito e *char* $K = p > 2$.

Teorema 5 (Azevedo - Koshlukov)

O T_2-ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $E \otimes E$ é gerado pelos polinômios

$$[x_1, x_2] \quad , \quad (y_1 y_2 y_3 + y_3 y_2 y_1) \quad \text{e} \quad [x_1^p, y_1].$$

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $E \otimes E$

Di Vicenzo, mostrou que, em característica zero, as álgebras $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ possuem as mesmas identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas e portanto $C_2(M_{1,1}(E)) = C_2(E \otimes E)$.

Vamos supor então que K é infinito e *char* $K = p > 2$.

Teorema 5 (Azevedo - Koshlukov)

O T_2-ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $E \otimes E$ é gerado pelos polinômios

$$[x_1, x_2] \quad , \quad (y_1 y_2 y_3 + y_3 y_2 y_1) \quad \text{e} \quad [x_1^p, y_1].$$

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $E \otimes E$

No sentido de descrever o T_2-espaço $C_2(E \otimes E)$, comecemos considerando a álgebra:

$$A = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a+\lambda & b \\ c & d+\lambda \end{array} \right) \middle| \, a, d \in E_0' \, , \, b, c \in E_1 \, , \, \lambda \in K \right\}$$

onde E_0' é a componente par da álgebra de Grassmann sem unidade E'.

- A é uma subálgebra de $M_{1,1}(E)$;
- A possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural induzida pela $\mathbb{Z}_2$-graduação de $M_{1,1}(E)$.

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $E \otimes E$

No sentido de descrever o T_2-espaço $C_2(E \otimes E)$, comecemos considerando a álgebra:

$$A = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a+\lambda & b \\ c & d+\lambda \end{array} \right) \middle| \, a, d \in E_0' \, , \, b, c \in E_1 \, , \, \lambda \in K \right\}$$

onde E_0' é a componente par da álgebra de Grassmann sem unidade E'.

- A é uma subálgebra de $M_{1,1}(E)$;
- A possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural induzida pela $\mathbb{Z}_2$-graduação de $M_{1,1}(E)$.

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $E \otimes E$

No sentido de descrever o T_2-espaço $C_2(E \otimes E)$, comecemos considerando a álgebra:

$$A = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a+\lambda & b \\ c & d+\lambda \end{array} \right) \middle| \; a, d \in E_0' \;,\; b, c \in E_1 \;,\; \lambda \in K \right\}$$

onde E_0' é a componente par da álgebra de Grassmann sem unidade E'.

- A é uma subálgebra de $M_{1,1}(E)$;
- A possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural induzida pela $\mathbb{Z}_2$-graduação de $M_{1,1}(E)$.

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $E \otimes E$

Azevedo e Koshlukov provaram que $E \otimes E$ e A possuem o mesmo T_2-ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas.

Por consequência, $C_2(A) = C_2(E \otimes E)$.

Consideremos U o T_2-espaço de $K(X \cup Y)$ gerado pelos polinômios:

$$z_1[x_1, x_2]z_2 \quad , \quad z_1(y_1y_2y_3 + y_3y_2y_1)z_2 \quad , \quad z_1[x_1^p, y_1]z_2$$

$$[y_1, y_2] \quad , \quad x_1^p$$

onde $z_i \in X \cup Y$.

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $E \otimes E$

Azevedo e Koshlukov provaram que $E \otimes E$ e A possuem o mesmo T_2-ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas.

Por consequência, $C_2(A) = C_2(E \otimes E)$.

Consideremos U o T$_2$-espaço de $K(X \cup Y)$ gerado pelos polinômios:

$$z_1[x_1, x_2]z_2 \quad , \quad z_1(y_1y_2y_3 + y_3y_2y_1)z_2 \quad , \quad z_1[x_1^p, y_1]z_2$$

$$[y_1, y_2] \quad , \quad x_1^p$$

onde $z_i \in X \cup Y$.

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $E \otimes E$

Azevedo e Koshlukov provaram que $E \otimes E$ e A possuem o mesmo T_2-ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas.

Por consequência, $C_2(A) = C_2(E \otimes E)$.

Consideremos U o T_2-espaço de $K(X \cup Y)$ gerado pelos polinômios:

$$z_1[x_1, x_2]z_2 \quad , \quad z_1(y_1y_2y_3 + y_3y_2y_1)z_2 \quad , \quad z_1[x_1^p, y_1]z_2$$

$$[y_1, y_2] \quad , \quad x_1^p$$

onde $z_i \in X \cup Y$.

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $E \otimes E$

Lema 3

$T_2(A) \subset U \subseteq C_2(A)$.

Lema 4

Os polinômios $(y_1 \circ y_2)(y_3 \circ y_4)$, $[y_1, y_2][y_3, y_4]$, $[y_1, y_2]x_1^p$ e $x_1^p x_2^p$ pertencem a U. Além disso, U é multiplicativamente fechado.

Teorema 6 (Brandão - Koshlukov)

$C_2(E \otimes E) = U$

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $E \otimes E$

Lema 3

$T_2(A) \subset U \subseteq C_2(A)$.

Lema 4

Os polinômios $(y_1 \circ y_2)(y_3 \circ y_4)$, $[y_1, y_2][y_3, y_4]$, $[y_1, y_2]x_1^p$ e $x_1^p x_2^p$ pertencem a U. Além disso, U é multiplicativamente fechado.

Teorema 6 (Brandão - Koshlukov)

$C_2(E \otimes E) = U$

Polinômios Centrais $\mathbb{Z}_2$-graduados para $E \otimes E$

Lema 3

$T_2(A) \subset U \subseteq C_2(A)$.

Lema 4

Os polinômios $(y_1 \circ y_2)(y_3 \circ y_4)$, $[y_1, y_2][y_3, y_4]$, $[y_1, y_2]x_1^p$ e $x_1^p x_2^p$ pertencem a U. Além disso, U é multiplicativamente fechado.

Teorema 6 (Brandão - Koshlukov)

$C_2(E \otimes E) = U$

Principais Referências

- A. Brandão, P. Koshlukov, *Central polynomials for $\mathbb{Z}_2$-graded algebras and for algebras with involution*, J. Pure Appl. Algebra, 208,877 – 886, (2007).
- O. M. Di Vincenzo, *On the graded identities of $M_{1,1}(E)$*, Israel J. Math. 80 (3), 323-335 (1992).
- P. Koshlukov, S. S. Azevedo, *Graded identities for T-prime algebras over fields of positive characteristic*, Israel J. Math. 128, 157-176 (2002).

Agradecimentos

MUITO OBRIGADO!